Решение задачи о замене оборудования методом динамического программирования

О. И. Канищева, e-mail: oleka_olesya@mail.ru [1, 2]
И. Н. Служенко [1]

[1] ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

[2] Воронежский государственный университет»

Аннотация. *В данной статье рассмотрено решение задачи о замене оборудования методом динамического программирования. Авторами была проанализирована математическая модель данной задачи, приведён алгоритм ее решения и разработана программная реализация. Результаты анализа модели подтверждены численными расчётами.*

Ключевые слова: *Математическое моделирование, динамическое программирование, замена оборудования, методы оптимизации, функция Беллмана, оптимальная стратегия, критерий оптимальности.*

Введение

В мире существует множество предприятий, которые используют для производства своей продукции машинное оборудование. Важной экономической проблемой является своевременное обновление оборудования: станков, автомобилей, компьютеров и др. Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего увеличиваются затраты на ремонт и обслуживание, снижается производительность труда и ликвидная стоимость.

Задача о замене оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности является либо прибыль от эксплуатации оборудования, либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода. В работе предлагается использовать методы динамического программирования для решения задачи о своевременной замене оборудования.

В задачах динамического программирования экономический процесс зависит от времени (от нескольких периодов времени), поэтому находится ряд оптимальных решений (последовательно для каждого этапа), обеспечивающих оптимальное развитие всего процесса в целом. Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов и процессов, зависящих от времени. Экономический процесс считается управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса [1].

Динамическое программирование, используя поэтапное планирование, позволяет не только упростить решение задачи, но и решить те из них, к которым нельзя применить методы математического анализа. Упрощение решения достигается за счет значительного уменьшения количества исследуемых вариантов, так как вместо того, чтобы один раз решать сложную многовариантную задачу, метод поэтапного планирования предполагает многократное решение относительно простых задач [2].

Планируя поэтапный процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, т.е. при принятии решения на отдельном этапе всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Однако динамическое программирование имеет и свои недостатки. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого метода не существует. Каждая задача имеет свои сложности, и в каждом случае необходимо найти наиболее подходящую методику решения. Недостаток динамического программирования заключается также в трудоемкости решения многомерных задач.

1. Математическая модель динамического программирования

Составим математическую модель динамического программирования. Дополнительно введем следующие условные обозначения: s – состояние процесса, s_i – множество возможных состояний процесса перед i-м шагом, w_i – выигрыш с i-го шага до конца процесса, $i=\overline{1,m}$.

Выделим следующие основные этапы составления математической модели задачи динамического программирования:

1. Разбиение задачи на шаги (этапы). Шаг не должен быть слишком мелким, чтобы не проводить лишних расчетов и не должен быть слишком большим, усложняющим процесс шаговой оптимизации.

2. Выбор переменных, характеризующих состояние s моделируемого процесса перед каждым шагом, и выявление налагаемых на них ограничений. В качестве таких переменных следует брать факторы, представляющие интерес для исследователя.

3. Определение множества шаговых управлений X_i, $i=\overline{1,m}$ и налагаемых на них ограничений, т.е. области допустимых управлений X.

4. Определение выигрыша $\varphi_i(S, X_i)$, который принесет на i-м шаге управление X_i, если система перед этим находилась в состоянии S.

5. Определение состояния S', в которое переходит система из состояния S под влиянием управления X_i, $S'=f_i(S, X_i)$, где f_i – функция перехода на i-м шаге из состояния S в состояние S'.

6. Составление уравнения, определяющего условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для составления s моделируемого процесса

$$(1)\ W_m(S) = \max_{X_m \in X} \{\varphi_m(S, X_m)\}.$$

7. Составление основного функционального управления динамического программирования, определяющего условный оптимальный выигрыш для данного состояния S с i-го шага и до конца процесса через уже известный условный оптимальный выигрыш с (i+1)-го шага и до конца

$$(2)\ W_i(S) = \max_{X_i \in X} \{\varphi_i(S, X_i) + W_{i+1}(f_i(S, X_i))\}.$$

В уравнение (2), в уже известную функцию $W_{i+1}(S)$, характеризующую условный оптимальный выигрыш с (i+1)-го шага до конца процесса, вместо состояния S подставлено новое состояние $S'=f_i(S, X_i)$, в которое система переходит на i-м шаге под влиянием управления X_i.

Заметим, что структура модели динамического программирования отличается от статической модели линейного программирования. Действительно, в моделях линейного программирования, управляющие переменные – это одновременно и переменные состояния моделируемого процесса, а в динамических моделях отдельно вводятся переменные управления X_i и переменные, характеризующие изменение состояния S под влиянием управления. Таким образом, структура динамических моделей более сложная, что естественно, так как в этих моделях дополнительно учитывается фактор времени.

Большинство методов исследования операций связано в первую очередь с задачами вполне определенного содержания. Классический аппарат математики оказался малопригодным для решения многих задач оптимизации, включающих большое число переменных и/или ограничений в виде неравенств. Несомненна привлекательность идеи разбиения задачи большой размерности на подзадачи меньшей размерности, включающие всего по несколько переменных, и последующего решения общей задачи по частям. Именно на этой идее основан метод динамического программирования [3].

Метод можно использовать для решения весьма широкого круга задач, включая задачи распределения ресурсов, замены и управления запасами, задачи о загрузке. Характерным для динамического программирования является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

2. Этапы решения задачи динамического программирования

После того как выполнены пункты 1-7, и математическая модель составлена, приступают к ее расчету.

Основные этапы решения задачи динамического программирования:

1. Определение множества возможных состояний S_m для последнего шага.

2. Проведение условной оптимизации для каждого состояния $S \in S_m$ на последнем m-ом шаге по формуле (1) и определение условного оптимального управления $X(S)$), $S \in S_m$.

3. Определение множества возможных состояний S_i для i-го шага, $i = 2,3,..,m-1$.

4. Проведение условной оптимизации i-го шага, $i = 2,3,..,m-1$ для каждого состояния $S \in S_m$ по формуле (2) и определение условного оптимального управления $X_i(S)$), $S \in S_m$, $i = 2,3,..,m-1$.

5. Определение начального состояния системы S_1 , оптимального выигрыша $W_1(S_1)$ и оптимального управления $X_1(S_1)$ по формуле (2) при $i = 1$. Это есть оптимальный выигрыш для всей задачи $W^* = W_1(X_1^*)$.

6. Проведение безусловной оптимизации управления. Для проведения безусловной оптимизации, необходимо найденное на первом шаге оптимальное управление $X_1^* = X_1(S_1)$ подставить в формулу $S' = f_i(S, X_i)$ и определить следующее состояние системы $S_1 = f_1(S_1, X_1)$. Для измененного состояния найти оптимальное управление $X_2^* = X_2(S_2)$,

подставить в формулу $S'=f_i(S, X_i)$ и т.д. Для i-го состояния S_1 найти $S_{i+1}=f_{i+1}(S_i, X_i^*)$ и $X_{i+1}^*(S_{i+1})$ и т. д.

3. Формулировка задачи о замене оборудования

Задача о замене оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности являются либо доход от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию (задача минимизации) в течение планируемого периода. Мы будем рассматривать задачу максимизации, и критерием оптимальности будет доход от эксплуатации оборудования.

Принцип оптимальности Беллмана – важнейшее положение динамического программирования: оптимальное поведение в задачах динамического программирования обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решение (т. е. «управление»), последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения. Этот принцип можно выразить и рассуждая от противного: если не использовать наилучшим образом то, чем мы располагаем сейчас, то и в дальнейшем не удастся наилучшим образом распорядиться тем, что мы могли бы иметь. Следовательно, если имеется оптимальная траектория, то и любой ее участок представляет собой оптимальную траекторию. Этот принцип позволяет сформулировать эффективный метод решения широкого класса многошаговых задач.

Под функцией Беллмана понимаем минимальное значение критерия качества в текущий момент времени. Значение функции Беллмана $S(X, t)$ определяет минимальную величину функционала для любого начального состояния $X(t)$ в любой момент времени t . С другой стороны, значение функции Беллмана совпадает со значением, так называемых текущих потерь на управление [4].

Эксплуатация оборудования планируется в течение n лет, но оборудование имеет тенденцию с течением времени стареть и приносить все меньшую годовую прибыль $R(t)$, где t – возраст оборудования. При этом есть выбор: либо в начале любого года продать устаревшее оборудование за цену $S(t)$, которая также зависит от возраста, и купить новое оборудование за цену P, либо оставить оборудование в эксплуатации. Требуется найти оптимальный план замены оборудования с тем, чтобы суммарная прибыль за все n лет была максимальной, учитывая, что к началу эксплуатационного периода возраст оборудования составляет t_0 лет.

Входными данными к этой задаче являются: $R(t)$ – доход от эксплуатации в течение одного года оборудования возраста t лет; $S(t)$ – остаточная стоимость оборудования; P – цена нового оборудования; t_0 – начальный возраст оборудования.

Переменной управления на k-м шаге является логическая переменная, которая может принимать два значения: С – сохранить, З – заменить оборудование в начале k-го года. Переменной состояния системы на k-м шаге является переменная t.

Функцию Беллмана $F_k(t)$ определим как максимально возможную прибыль от эксплуатации оборудования за годы с k-го по n-й, если к началу k-го года возраст оборудования составлял t лет. Применяя то или иное управление, мы переводим систему в некоторое новое состояние, а именно, если в начале k-го года мы сохраняем оборудование, то к началу следующего (k+1)-го года его возраст увеличится на 1 (состояние системы станет равно t+1), за год оно принесет прибыль $R(t)$, и максимально возможная прибыль за оставшиеся годы (с (k+1)-го по n-й) составит $F_{k+1}(t+1)$. Если же в начале k-го года принимаем решение о замене оборудования, то мы продаем старое оборудование возраста t лет за цену $S(t)$, покупаем новое оборудование за цену P и эксплуатируем его в течение k-го года, что приносит за этот год прибыль $R(0)$. К началу следующего года возраст оборудования составит 1 год, и за все годы с (k+1)-го по n-й максимально возможная прибыль будет $F_{k+1}(1)$.

Из этих двух вариантов управления выбираем тот, который приносит большую прибыль. Уравнение Беллмана на каждом шаге имеет вид:

$$(3)\; F_k(t) = \max \begin{Bmatrix} R(t) + F_{k+1}(t+1), & (С) \\ S(t) - P + R(0) + F_{k+1}(1), & (З) \end{Bmatrix}.$$

Функцию Беллмана для первого шага (k=n) легко вычислить – это максимально возможная прибыль только за последний n-й год:

$$(4)\; F_n(t) = \max \begin{Bmatrix} R(t), & (С) \\ S(t) - P + R(0), & (З) \end{Bmatrix}.$$

Вычислив значение функции $F_n(t)$ по формуле (4), далее можно посчитать $F_{n-1}(t)$, затем $F_{n-2}(t)$ и так далее до $F_1(t_0)$. Функция $F_1(t_0)$ представляет собой максимально возможную прибыль за все годы (с 1-

го по n-й). Максимум достигается при некотором управлении, применяя которое в течение первого года, мы определяем возраст оборудования к началу второго года (в зависимости от того, какое управление является для первого года оптимальным, это будет 1 или $(t_0 + 1)$. Для данного возраста оборудования по результатам, полученным на этапе условной оптимизации, мы смотрим, при каком управлении достигается максимум прибыли за годы со 2-го по n-й и так далее. На этапе безусловной оптимизации отыскиваются годы, вначале которых следует произвести замену оборудования.

4. Решение задачи о замене оборудования

Условие задачи: найти оптимальный план замены оборудования на 6-летний период, если известны производительность оборудования $R(t)$ и остаточная стоимость оборудования $S(t)$ в зависимости от возраста, стоимость нового оборудования P (заданы в таблицах). Возраст оборудования к началу эксплуатации равен 1 год.

Таблица 1

Исходные данные

t	0	1	2	3	4	5	6
R(t)	10	10	9	8	8	7	6
S(t)	11	8	7	7	6	6	5

P = 11 – цена нового оборудования

Решение задачи:

Алгоритм решения задачи о замене оборудования состоит из следующих шагов:

1. Задать предполагаемый срок эксплуатации.
2. Определить входные параметры ($R(t)$ – доход от эксплуатации в течение одного года оборудования возраста t лет и $S(t)$ – остаточную стоимость оборудования).
3. Задать цену нового оборудования (P).
4. Рассчитать функцию Беллмана $F_k(t)$ для каждого года эксплуатации по формуле (3) и определить, следует ли заменять используемое оборудование.

На первом шаге, где k = 6 и возможные состояния системы $t=1,2,..,6$, расчет будем вести по формуле (4). Полученные значения: $F_6(1) = 10$, $F_6(2) = 9$, $F_6(3) = 8$, $F_6(4) = 8$, и т.д.

Далее расчет ведется по формуле (3). Составим матрицу значений функции Беллмана (Таблица 2.).

Таблица 2

Матрица значений функций Беллмана

k	t					
	1	2	3	4	5	6
1	52					
2	44	42				
3	35	34	33			
4	27	25	25	24		
5	19	17	16	15	15	
6	10	9	8	8	7	6

Теперь составим матрицу логических значений (Сохранить/Заменить), следуя правилу: ЕСЛИ $R(t) + F_{k+1}(t+1) \geq S(t) - P + R(0) + F_{k+1}(1)$, ТО значение = «Сохранить», ИНАЧЕ, значение «Заменить». Полученные результаты представлены в таблице 3.

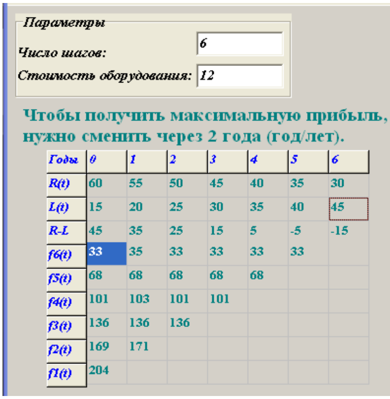
Матрица логических значений

k	t					
	1	2	3	4	5	6
1	С					
2	С	С				
3	С	С	**З**			
4	С	С	**З**	**З**		
5	С	С	С	С	**З**	
6	С	С	С	С	С	С

Выделенные в таблице 3 значения соответствует замене оборудования. Максимально возможная прибыль при эксплуатации оборудования достигается, если замену оборудования провести в начале третьего года его эксплуатации.

Заключение

В ходе выполнения работы была изучена и проанализирована теория решения задачи о замене оборудования, разработаны алгоритм и его программная реализация (Рис.1), позволяющая находить решение задачи при любых входных параметрах.



Годы	0	1	2	3	4	5	6
R(t)	60	55	50	45	40	35	30
L(t)	15	20	25	30	35	40	45
R-L	45	35	25	15	5	-5	-15
f6(t)	33	35	33	33	33	33	
f5(t)	68	68	68	68	68		
f4(t)	101	103	101	101			
f3(t)	136	136	136				
f2(t)	169	171					
f1(t)	204						

Рис. 1. Программная реализация задач

Эффективность решения задачи о замене оборудования методом динамического программирования обусловлена использованием рекуррентных формул (3), (4), позволяющих осуществить рациональный процесс поиска оптимальных вариантов, чем полный перебор вариантов. Это осуществляется при помощи функций Беллмана, несущих информацию об оптимальном продолжении процесса.

Список литературы

1. Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. Глава 15. Динамическое программирование // Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms / Под ред. И. В. Красикова. – 2-е изд. – М.: Вильямс, 2005. – 1296 с.
2. Щербина О. А. Методологические аспекты динамического программирования // Динамические системы, 2007, вып. 22. – с.21-36.
3. Sanjoy Dasgupta , Christos H. Papadimitriou, Umesh Vazirani Algorithms = Algorithms. – 1-е изд. – McGraw-Hill Science/Engineering/ Math, 2006. – С. 336.
4. Исследование операций в экономике /Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 407 с.